JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 16, 194–198 (1976)

Über den Satz von Mergelyan

WOLFGANG LUH

Mathematisches Institut der Universität Gießen, West Germany

Communicated by Lothar Collatz

Eines der zentralen Probleme der Approximationstheorie im Komplexen ist die Approximation regulärer Funktionen durch Polynome. Das grundlegende Ergebnis ist der Satz von Runge, nach welchem zu jeder in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G regulären Funktion f eine Folge von Polynomen existiert, die auf G kompakt gegen $f(z)$ konvergiert. Dieser Satz wurde in verschiedenen Richtungen verbessert. So zeigte etwa Walsh [11], daß jede im Inneren G einer geschlossenen Jordankurve reguläre und auf $\bar{G}$ stetige Funktion durch Polynome beliebig gut approximiert werden kann. Weitere Resultate erzielten Keldysh [2], Lavrentev [3], Mergelyan [7], Vitushkin [10]. Die wichtigsten Ergebnisse der Approximationstheorie im Komplexen sind in den Büchern von Smirnow–Lebedev [9] und Walsh [12] zusammengestellt.

Wir interessieren uns hier für den Satz von Mergelyan. Bezeichnen wir mit S die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, die ein Gebiet, das ∞ enthält, als Komplement haben und mit $M(B)$ die Menge aller Funktionen, die auf der Menge B stetig und an inneren Punkten von B regulär sind, so lautet der Satz von Mergelyan:

SATZ 1. *Es sei $B \in S$ und $f \in M(B)$. Dann gibt es eine Folge von Polynomen, die auf B gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert.*

Im Zusammenhang mit der Approximation reeller, stetiger Funktionen bewies Fekete die Existenz einer universellen Potenzreihe, mit deren Teilsummen alle auf einem festen Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < b$ stetigen Funktionen approximiert werden können. Es gilt (siehe [5, S.46; 8]):

SATZ 2. *Es sei $0 < a < b$. Dann gibt es eine Potenzreihe $\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa x^\kappa$ mit der Eigenschaft, daß zu jeder auf $[a, b]$ stetigen Funktion f eine Folge $\{N_k\}$ existiert, so daß*

$$s_{N_k}(x) = \sum_{\kappa=0}^{N_k} a_\kappa x^\kappa,$$

auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich (etwa durch Anwendung des Satzes von Müntz) leicht erbringen. Man beachte jedoch, daß über den Konvergenzradius der Reihe keine Aussage gemacht werden kann.

In dieser Arbeit diskutieren wir die Frage, ob es universelle Potenzreihen gibt, mit deren Teilsummen Funktionen der Klassen $M(B)$ approximiert werden können. Das erste Ergebnis ist (Siehe [1]):

SATZ 3. *Es gibt eine Potenzreihe* $\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa z^\kappa$ *vom Konvergenzradius* 1 *mit folgender Eigenschaft: Zu jeder in* $|z| > 1$ *gelegenen Menge* $B \in S$ *und jeder Funktion* $f \in M(B)$ *gibt es eine Folge* $\{N_k\}$, *die von* B *und* f *abhängig ist, so daß*

$$s_{N_k}(z) = \sum_{\kappa=0}^{N_k} a_\kappa z^\kappa,$$

auf B *gleichmäßig gegen* $f(z)$ *konvergiert.*

Unser nächster Satz ist eine Verschärfung dieses Ergebnisses.

SATZ 4. *Es sei* $A = (\alpha_{n\nu})$ *eine untere Dreiecksmatrix mit:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} = 1, \qquad \textit{(Zeilensummenbedingung)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = 0, \qquad \textit{für festes } \nu \textit{ (Spaltenbedingung)}.$$

Dann gibt es eine Potenzreihe $\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa z^\kappa$ *vom Konvergenzradius* 1 *mit folgender Eigenschaft: Zu jeder in* $|z| > 1$ *gelegenen Menge* $B \in S$ *und jeder Funktion* $f \in M(B)$ *gibt es eine Folge* $\{N_k\}$, *die von* B *und* f *abhängig ist, so daß*

$$\sigma_{N_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{N_k} \alpha_{N_k,\nu} \cdot s_\nu(z), \qquad \textit{mit } s_\nu(z) = \sum_{\kappa=0}^{\nu} a_\kappa z^\kappa,$$

auf B *gleichmäßig gegen* $f(z)$ *konvergiert.*

Wir wollen hier zeigen, daß Satz 3 und Satz 4 einfache Folgerungen aus einem Ergebnis von Luh [6] sind.

Satz 3 besagt, daß mit Hilfe der Teilsummen $s_n(z)$ einer universellen Potenzreihe alle Funktionen approximiert werden können, welche einer Klasse $M(B)$ angehören. Aus Satz 4 folgt, daß auch die Teilfolgen von Matrix-Transformierten $\sigma_n(z)$ universeller Potenzreihen zur Approximation herangezogen werden können. Es ist klar, daß Satz 4 eine Verallgemeinerung von Satz 3 ist; für die spezielle, zulässige Matrix $A = (\alpha_{n\nu})$ mit $\alpha_{n\nu} = 0$ für $\nu \neq n$ und $\alpha_{nn} = 1$ erhalten wir ja gerade $\sigma_n(z) = s_n(z)$. Es genügt also, Satz 4 zu beweisen.

Zuvor betrachten wir als ein Beispiel die Cesàro-Transformierten von Potenzreihen.

Für die arithmetischen Mittel ($\alpha_{n\nu} = 1(n+1)$) gilt zunächst:

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} (n+1-\nu)\, a_\nu z^\nu$$
$$= s_n(z) - \frac{1}{n+1} \cdot z \cdot s_n'(z).$$

Satz 4 besagt also für diesen Fall, daß zur Approximation von Funktionen der Klassen $M(B)$ Polynome benutzt werden können, welche gewisse Linearkombinationen von

$$s_n(z), \qquad z \cdot s_n'(z)$$

sind, wobei $\{s_n(z)\}$ die Teilsummenfolge einer universellen Potenzreihe bedeutet.

Betrachten wir allgemeiner für eine feste natürliche Zahl r Cesàro–Mittel C_r, so ist $\alpha_{n\nu} = \binom{n-\nu+r-1}{r-1} / \binom{n+r}{r}$, und es ergibt sich:

$$\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\binom{n-\nu+r-1}{r-1}}{\binom{n+r}{r}} s_\nu(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\binom{n-\nu+r}{r}}{\binom{n+r}{r}} a_\nu z^\nu.$$

Hierbei ist

$$\frac{\binom{n-\nu+r}{r}}{\binom{n+r}{r}} = \prod_{\kappa=1}^{r} \left(1 - \frac{\nu}{n+\kappa}\right) = \sum_{\kappa=0}^{r} c_{n\kappa} \cdot \kappa! \cdot \binom{\nu}{\kappa}$$

ein Polynom in ν vom Grad r mit gewissen von n abhängigen Koeffizienten $c_{n\kappa}$. Es gilt daher:

$$\sigma_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\kappa=0}^{r} c_{n\kappa} \cdot \kappa! \cdot \binom{\nu}{\kappa} a_\nu z^\nu$$
$$= \sum_{\kappa=0}^{r} c_{n\kappa} \cdot \kappa! \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu}{\kappa} a_\nu z^\nu$$
$$= \sum_{\kappa=0}^{r} c_{n\kappa} \cdot z^\kappa \cdot s_n^{(\kappa)}(z).$$

In diesem Fall besagt unser Satz 4, daß die Funktionen der Klassen $M(B)$ durch Polynome approximierbar sind, welche geeignete Linearkombinationen von

$$s_n(z), \int z \cdot s_n'(z), \int z^2 \cdot s_n''(z), \int \ldots, \int z^r \cdot s_n^{(r)}(z)$$

sind, wobei $\{s_n(z)\}$ wieder die Teilsummenfolge einer universellen Potenzreihe bedeutet.

Beweis zu Satz 4. Es sei G die Menge aller einfach zusammenhängenden Gebiete außerhalb des Einheitskreises, die von Polygonen mit endlich vielen Ecken berandet werden. Diese Ecken sollen überdies in Punkten mit rationalem Real und Imaginärtail liegen. G ist abzählbar; es sei durch $G_1{}^*$, $G_2{}^*$,... eine Abzählung gegeben.

Ferner sei P die Menge aller Polynome, deren Koeffizienten rationalen Real und Imaginärteil haben. P ist ebenfalls abzählbar; es sei durch $P_1{}^*$, $P_2{}^*$,... eine Abzählung gegeben.

Wir nehmen eine Umnummerierung der $G_\nu{}^*$ und $P_\nu{}^*$ vor. Für natürliche Zahlen n, m mit $1 \leqslant m \leqslant n$ definieren wir

$$G_{\binom{n}{2}+m} = G_m{}^* \,; \quad f_{\binom{n}{2}+m} = P^*_{n-m+1}\,.$$

Auf diese Weise wird jeder natürlichen Zahl ν eindeutig ein Gebiet $G_\nu \in G$ und eine auf G_ν reguläre Funktion $f_\nu \in P$ zugeordnet.

Nach einem Satz von Luh [6, Satz 3.4.] gibt es eine genau auf $|z| < 1$ reguläre Funktion f_0, deren Potenzreihe

$$f_0(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa z^\kappa$$

folgende Eigenschaft hat: Zu jeder natürlichen Zahl ν gibt es eine Folge $\{n_l^{(\nu)}\}$, derart, daß

$$\sigma_{n_l^{(\nu)}}(z) = \sum_{\mu=0}^{n_l^{(\nu)}} \alpha_{n_l^{(\nu)},\mu} \cdot s_\mu(z)$$

auf G_ν kompakt gegen $f_\nu(z)$ konvergiert. Wir behaupten, daß die Reihe $\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa z^\kappa$ das Gewünschte leistet. Dazu sei eine in $|z| > 1$ gelegene Menge $B \in S$ und eine Funktion $f \in M(B)$ gegeben. Nach dem Satz von Mergelyan gibt es dann zu jeder natürlichen Zahl k ein Polynom P_k mit:

$$\max_B |f(z) - P_k(z)| < 1/k.$$

Es sei $G^*_{\nu_0} \in G$ ein Gebiet mit $B \subset G^*_{\nu_0}$ und $P^*_{\nu_k} \in P$ ein Polynom mit

$$\max \overline{G^*_{\nu_0}} \,|\, P_k(z) - P^*_{\nu_k}(z)| < 1/k.$$

Betrachten wir nun die Folge $m_k = \binom{\nu_0+\nu_k-1}{2} + \nu_0$, so haben wir:

$$G_{m_k} = G^*_{\nu_0} \qquad f_{m_k} = P^*_{\nu_0+\nu_k-1-\nu_0+1} = P^*_{\nu_k}$$

und daher

$$\max_{\overline{G_{m_k}}} | P_k(z) - f_{m_k}(z)| < 1/k.$$

Nach Konstruktion der Reihe $\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa z^\kappa$ gibt es nun zu jeder natürlichen Zahl k eine Folge $\{n_l^{(m_k)}\}$, so daß $\{\sigma_{n_l^{(m_k)}}(z)\}$ auf G_{m_k} kompakt gegen $f_{m_k}(z)$ konvergiert. Zu jedem k gibt es also, da B eine kompakte Teilmenge von G_{m_k} ist, ein l_k, so daß gilt:

$$\max_B | \sigma_{n_{l_k}^{(m_k)}}(z) - f_{m_k}(z)| < 1/k.$$

Setzen wir $N_k = n_{l_k}^{(m_k)}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\max_B | \sigma_{N_k}(z) - f(z)| &\leqslant \max_B | \sigma_{N_k}(z) - f_{m_k}(z)| \\ &\quad + \max_{\overline{G_{m_k}}} | P_k(z) - f_{m_k}(z)| + \max_B | P_k(z) - f(z)| \\ &< 3/k.\end{aligned}$$

Die Folge $\{\sigma_{N_k}(z)\}$ leistet also das Gewünschte.

LITERATUR

1. C. K. CHUI AND M. N. PARNES, Approximation by overconvergence of a power series, *J. Math. Anal. Appl.* **36** (1971), 693–696.
2. M. KELDYSH, On the representation of functions of a complex variable by series of polynomials on closed domains (Russian), *Mat. Sb.* **16** (1945), 249–258.
3. M. A. LAVRENTEV, Zur Theorie der konformen Abbildungen (Russian), *Trav. Inst. Phys. Math. Stekloff* **5** (1934), 159–245.
4. M. A. LAVRENTEV, "Sur les fonctions d'une variable complexe, représentables par des séries de polynomes," Actualités Sci. Ind. No. 441, Hermann, Paris, 1936.
5. G. G. LORENTZ, "Bernstein polynomials," Mathematical Expositions No. 8, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1953.
6. W. LUH, Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten, *Mitt. Math. Sem. Giessen* **88**, 1970.
7. S. N. MERGELYAN, Uniform approximations of functions of a complex variable (Russian), *Uspehi Mat. Nauk* **7** (1952), 31–122.
8. J. PAL, Zwei kleine Bemerkungen, *Tôhoku Math. J.* **6** (1915), 42–43.
9. V. I. SMIRNOW AND N. A. LEBEDEV, "Functions of a complex variable: Constructive theory," The M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1968.
10. A. G. VITUSHKIN, Necessary and sufficient conditions a set should satisfy in order that any function continuous on it can be approximated uniformly by analytic or rational functions (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **128** (1959), 17–20.
11. J. L. WALSH, Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen, *Math. Ann.* **96** (1927), 430–436.
12. J. L. WALSH, "Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain," 3rd ed, Vol. 20, Colloquium, American Mathematical Society, Providence, RI, 1960.